2 oct '95

Inhoud

- foutenanalyse
- interpolatie, approximatie, splines
- FFT
- numerieke integratie
- numerieke lineaire algebra (niet te vinden in de cursus, wel kopiekes bij i.g)
- Stelsels niet lineaire vergelijkingen

Boek : Golub & Van Loan, 2e druk; Matrix computations; John's Hopkins Univ Press
Cursus te vinden bij I.G
Vak telt voor 6 studiepunten.
Er worden 2 projectjes voorzien om de behoefte aan numeriek experimenteren te voldoen.

Relatieve fout, maximum relatieve fout, absolute fout en maximum absolute fout

$$\tilde{X} = X + \gamma$$

$\tilde{X}$ is de berekende waarde. X is de exacte waarde en γ is de absolute fout.

$$|\gamma| < \varepsilon$$

ε is de bovengrens voor de absolute fout.

$$\frac{\tilde{X} - X}{X} = \frac{\gamma}{X}$$

Hierin heet $\frac{\gamma}{X}$ de relatieve fout en zoals verwacht heeft ook deze een bovengrens (ξ).

$$\left|\frac{\gamma}{X}\right| \leq \xi$$

IEEE precisie

Indien $x \in$ dan is $\mathrm{fl}(x)$ het dichtst bijzijnde reële getal, wel in de computer voorstelbaar.
De relatieve preciese $\left|\frac{\mathrm{fl}(x)-x}{x}\right| \leq \eta$, waarbij natuurlijk $x \neq 0$
IEEE; 64 bits $\eta \approx 10^{-15}$, indien $10^{-300} < |x| < 10^{300}$
Indien er 10-delig gewerkt wordt geld

$$\forall x \in , \quad \exists m; 0.1 \leq |m| < 1, \quad \exists e : x = m.10^e$$

Dat m hier tussen 0,1 en 1 moet liggen is een kwestie van normalisatie.
In het algemeen, voor een grondtal β (2,8,10,16...) geld

$$x = m.\beta^e \quad \text{met} \quad \frac{1}{\beta} \leq |m| < 1$$

Hierin bevat m p- β-tallige cijfers en e bevat q β-tallige cijfers.
Als $\beta = 2$ dan heeft men

- 53 bits mantisse
- 1 bit mantisse–teken
- 10 bits exponent
- 1 bit exponent–teken

Maar omdat (bij stom toeval eigenlijk) de eerste bit van de mantisse steeds 1 is. ($\frac{1}{2} \leq |m| < 1$) wordt het teken van de mantisse bewaart in de mantisse.

Nu de preciesie van een afrondig eens bepalen :

$$\mathrm{fl}(x) = \mathrm{fl}(m)\beta^e$$

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\mathrm{fl}(x) - x}{x}\right| &= \frac{|m - \mathrm{fl}(m)|\,\beta^e}{|m|\,\beta^e} \\
&\leq \beta\,|\mathrm{fl}(m) - m| \\
&\leq \beta\frac{1}{2}\beta^{-p} \\
&\leq \frac{1}{2}\beta^{1-p}
\end{aligned}$$

Indien nu $p = 53$; $\beta = 2$, dan is $\eta \leq 2^{-53}$
Indien men zestiendelig werkt: $\beta = 16$ dan is $\eta \leq 2^{-49}$

Voorbeeld van instabiel/stabiel algoritme

Stel dat een algoritme E_n berekent uit E_{n-1} als volgt:

$$E_n = 1 - nE_{n-1}$$

en dat er slechts 1 absolute fout wordt gemaakt bij de start, namelijk

$$\widetilde{E}_0 = \text{fl}(E_0) = E_0 + \delta, \quad |\delta| \leq n$$

Vanaf nu wordt exact gerekend.

$$\begin{aligned}
\widetilde{E}_1 &= 1 - E_0 - \delta \\
\widetilde{E}_2 &= 1 - 2\widetilde{E}_1 = 1 - 2(1 - E_0) + 2\delta \\
\widetilde{E}_3 &= 1 - 3\widetilde{E}_2 = 1 - 3E_2 - 6\delta \\
&\vdots \\
\widetilde{E}_n - E_n &= \pm n!\delta
\end{aligned}$$

Indien dit algoritme omgekeerd gevolgd wordt. T.t.z : E_n berekenen uit E_{n+1} dan verkleint de fout. De beginfout op $\widetilde{E}_n$ bedraagt γ

$$\widetilde{E}_n = E_n + \gamma$$

De recursierelatie om terug te rekenen is

$$E_{n-1} = \frac{1 - E_n}{n}$$

En bijgevolg verkleint de fout

$$\widetilde{E}_{n-1} = \frac{1 - \widetilde{E}_n}{n} = \frac{1 - E_n - \gamma}{n} = E_{n-1} - \frac{\gamma}{n}$$

bij elke stap met een factor n.

O en o

Eerst O eens definieren.

$$f(x) = \mathrm{O}(g(x)) \quad (x \to a) \qquad \forall\delta > 0,\ \exists C_\delta > 0,\ \forall x \in [a - \delta, a + \delta] : |f(x)| \leq C_\delta\,|g(x)|$$

Indien $f_1(x) = \mathrm{O}(g(x))$ en $f_2(x) = \mathrm{O}(g(x))$ dan is $f_1 + f_2 = \mathrm{O}(g(x))$. Als $\rho_1(x) = \mathrm{O}(g(x))$ en $\rho_2(x) = \mathrm{O}(h(x))$ dan is $\rho_1(x) + \rho_2(x) = \mathrm{O}(\max(g(x), h(x)))$ en $\rho_1(x).\rho_2(x) = \mathrm{O}(g(x).h(x))$
Merk op dat $\sqrt{(1 + \varepsilon)} = \mathrm{O}(1 + \frac{\varepsilon}{2})$ en niet van grootteorde $\mathrm{O}(\sqrt{\varepsilon})$ is. En wel omdat we nu niet met grote getallen, maar met kleine getallen werken. Dus de 1 binnen de wortel mag niet zomaar rap eventjes weggelaten worden.

Kleine o wordt als volgt gedefinieert

$$f(x) = \mathrm{o}(g(x)), \quad (x \to a) \qquad \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Bijvoorbeeld : $e^{-x} = \mathrm{o}(x^{-n}), \quad \forall n, \quad (x \to \infty)$

Conditiegetal

De fout op de invoerwaarde bedraagt δ

$$\begin{aligned}\tilde{y} &= f(a+\delta) \\ &= f(a) + \delta f'(a) + \mathrm{O}(\delta^2) \quad \text{(Taylor)} \\ \tilde{y} - y &= \delta f'(a) + \mathrm{O}(\delta^2) \\ \frac{\tilde{y} - y}{y} &= \frac{\delta}{a}\frac{a.f'(a)}{f(a)} + \mathrm{O}(\frac{\delta^2}{a})\end{aligned}$$

$\frac{a.f'(a)}{f(a)}$ wordt het conditiegetal genoemd. Bij een telraam met η als de relatieve machinepreciesie is de fout op de invoerwaarde $\left|\frac{\delta}{a}\right| \leq \eta$. De onvermijdelijke fout bij de berekening van y=f(a) uit a is dus $\leq \eta\left|\frac{a.f'(a)}{f(a)}\right| + \eta$. Indien het conditiegetal te groot is, enige oplossing $\to$ nauwkeuriger rekenen.

Numeriek stabiel

Een algoritme heet "numeriek stabiel" als de afrondfout opgebouwd in het berekende resultaat van gelijke grootteorde is als de onvermijdelijke fout.

9 oct '95

Herhaling

$$y = f(x)$$

$$\text{Conditiegetal} := \frac{xf'(x)}{f(x)}$$

$$f(x+\delta) = f(x) + \delta f'(x) + O(\delta^2)$$
$$f(x+\delta) - f(x) = \delta f'(x) + O(\delta^2)$$
$$\frac{f(x+\delta) - f(x)}{f(x)} = \frac{\delta f'(x) x}{f(x) x}$$

Afrondfoutenanalyse (Wilkenson)

$$y = f(x)$$

1^e Mathematische definitie → Onvermijdelijke fout (afronden invoer en uitvoer)≤ conditiegetal.η^2
2^e Algoritme

Stel dat a en b exact gekend zijn, dan is niet noodzakelijk a+b exact gekend. Bijvoorbeeld:

$$1,25$$
$$0,222$$
$$1,038$$

Maar deze moet afgerond worden naar 1,04 omdat de mantisse maar 3 decimalen kan bevatten. (in dit voorbeeld).

In het algemeen

Stelling: Als $\otimes \in \{+, -, /, *\}$ dan geldt (geen over/underflows)

$$\left| \frac{\mathrm{fl}(a \otimes b) - (a \otimes b)}{a \otimes b} \right| \leq \eta$$

maar ook

$$\left| \frac{\mathrm{fl}(a \otimes b) - (a \otimes b)}{\mathrm{fl}(a \otimes b)} \right| \leq \eta$$

Anders geformuleerd

om er mee te kunnen rekenen. Bij iedere operatie zijn er getallen ε_i bij de operanden zodat

$$\mathrm{fl}(a \otimes b) = (a \otimes b)(1 + \varepsilon_1) = \frac{a \otimes b}{1 + \varepsilon_2}$$

$$|\varepsilon_i| \leq \eta$$

→ Intervalarithmetiek is hierop gebasseert.

Voorbeeld 2: $1 - x^2$
$1 - x^2$ kan berekent worden als $(1-x)(1+x)$, maar eerst eens de normale methode gebruiken, t.t.z: $1 - x * x$

$$\begin{aligned}
\mathrm{fl}(1 - x * x) &= \mathrm{fl}(1 - \mathrm{fl}(x * x)) \\
&= \mathrm{fl}(1 - x * x * (1 + \varepsilon_1)) \\
&= (1 + \varepsilon_2)(1 - x * x * (1 + \varepsilon_1)) \\
&= (1 + \varepsilon_2)(1 - \widetilde{x}^2) \qquad \text{met } \widetilde{x} := x\sqrt{1 + \varepsilon_1}
\end{aligned}$$

Dit is een gemengde foutenanalyse. $\frac{\widetilde{x} - x}{x}$ is het achterwaartse deel van de fout. Het voorwaartse deel van de fout bestaat uit $\varepsilon_2(1 - \widetilde{x}^2)$. Dit ding is dus numeriek stabiel.

De alternatieve rekenwijze $1 - x^2 = (1-x)(1+x)$ eens onderzoeken:

$$\begin{aligned}
\mathrm{fl}((1 - x) * (1 + x)) &= (1 - x)(1 + \varepsilon_1)(1 + x)(1 + \varepsilon_2)(1 + \varepsilon_3) \\
&= (1 - x)(1 + x)(1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) \\
&= (1 - x^2)(1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)
\end{aligned}$$

Deze rekenwijze is dus ook numeriek stabiel.

Voorbeeld 3
Zie cursus pagina 5. De grootteorde van $\sqrt{1 + \varepsilon} = 1 + \frac{1}{2}\varepsilon + \mathrm{O}(\varepsilon^2)$. Natuurlijk enkel als $\varepsilon < 1$ en $\varepsilon \to 0$

Wortels trekken volgens Newton
Het berekenen van $\sqrt{a}$ komt er op neer een nulpunt te zoeken van $g(x) = x^2 - a$.

$$\begin{aligned}
g(x) &= 0 \\
g(x) &= g(x_0) + (x_1 - x_0)g'(x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^2 g''(\xi) \\
0 &= g(x_0) + (x_1 - x_0)g'(x_0) \\
0 = g(x) &= g(x_0) + (x_1 - x_0)g'(x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^2 g''(\xi) \\
&\text{aftrekken geeft} \\
0 &= (x_1 - x)g'(x_0) - \frac{1}{2}(x - x_0)^2 g''(\xi) \\
x_1 - x &= \frac{\frac{1}{2}(x - x_0)^2 g''(\xi)}{g'(x_0)}
\end{aligned}$$

Opgave 1, p.3

$$\begin{aligned}
F_{X+Y} &= \widetilde{X+Y} - (X+Y) \\
&= \widetilde{X} + \widetilde{Y} - X - Y \\
&= \widetilde{X} - X + \widetilde{Y} - Y \\
&= F_X + F_Y
\end{aligned}$$

Opgave 2, p.3

Te bewijzen : $\Delta_X + \Delta_Y$ is een bovengrens voor de absolute fout in $\widetilde{X+Y}$. (mini-)Bewijs(je) :

$$
\begin{aligned}
\Delta_X + \Delta_Y &\geq \left|\widetilde{X} - X\right| + \left|\widetilde{Y} - Y\right| \\
&\geq \left|\widetilde{X} - X + \widetilde{Y} - Y\right| \\
&= \left|\widetilde{X+Y} - (X+Y)\right|
\end{aligned}
$$

Opgave 3, p.3

Te bewijzen : Voor iedere arithmische operatie $\odot \in \{+, -, *, /\}$ bestaan er 2 getallen ε_i zodat

$$\text{fl}(x \odot y) = (x \odot y)(1 + \varepsilon_1) = \frac{x \odot y}{1 + \varepsilon_2} \quad \text{met } |\varepsilon_i| \leq \eta$$

Bewijz:

$$
\begin{aligned}
\text{fl}(x \odot y) &= (x \odot y) + \text{fl}(x \odot y) - (x \odot y) \\
&= (x \odot y) + \frac{(x \odot y)(\text{fl}(x \odot y) - (x \odot y))}{x \odot y} \\
&= (x \odot y)(1 + \varepsilon_1)
\end{aligned}
$$

met $\varepsilon_1 := \frac{\text{fl}(x \odot y) - (x \odot y)}{x \odot y}$ en dus zal $|\varepsilon_1| \leq \eta$. Verder:

$$
\begin{aligned}
\text{fl}(x \odot y) &= (x \odot y) + \text{fl}(x \odot y) - (x \odot y) \\
&= (x \odot y) + \frac{\text{fl}(x \odot y) - (x \odot y)}{\text{fl}(x \odot y)} \text{fl}(x \odot y) \\
-(x \odot y) &= -\text{fl}(x \odot y) + \frac{\text{fl}(x \odot y) - (x \odot y)}{\text{fl}(x \odot y)} \text{fl}(x \odot y) \\
x \odot y &= \text{fl}(x \odot y) + \frac{(x \odot y) - \text{fl}(x \odot y)}{\text{fl}(x \odot y)} \text{fl}(x \odot y) \\
\frac{x \odot y}{1 + \varepsilon_2} &= \text{fl}(x \odot y)
\end{aligned}
$$

natuurlijk met $\left|\varepsilon_2 := \frac{(x \odot y) - \text{fl}(x \odot y)}{\text{fl}(x \odot y)}\right| \leq \eta$.

Opgave 4, p.4, 23 oct 95

$$
\begin{aligned}
\frac{e^{-5} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-5)^k}{k!}}{e^{-5}} &\leq \frac{1}{1000} \\
e^{-5} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-5)^k}{k!} &\leq \frac{1}{1000 e^5} \\
\frac{5^n}{n!} &\leq \frac{1}{1000 e^5} \\
&e^5 \text{ is aangerond naar } 3^5 \\
\frac{5^n}{n!} &\leq \frac{1}{243000} \\
\frac{n!}{5^n} &\geq 243000
\end{aligned}
$$

n=22, is hier voldoende.
De absolute fout is dan.

$$\left|\widetilde{S} - S\right| \leq \sum_{j=0}^{22} \frac{5^n}{n!}$$

23 optellingen met machineprecisie η

$$\leq e^5.23\eta$$

De realtieve fout op dergelijk machine is

$$\approx e^{10}\eta 23$$

Dit zal dus niet gaan. Een beter methode is eerst e^5 te berekenen en dan het inverse te nemen.

<u>Opgave 5, p.4, 23 oct 95</u>

$$\begin{aligned}
f(x+h) &= f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(x+\theta h) \\
f(x-h) &= f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) - \frac{h^3}{3!}f'''(x-\widetilde{\theta}h) \\
f(x+h) - f(x-h) &= 2hf'(x) + 2\frac{h^3}{3!}\left(f'''(x+\theta h) + f'''(x-\widetilde{\theta}h)\right)
\end{aligned}$$

Tegen de laatste term $\left(f'''(x+\theta h) + f'''(x-\widetilde{\theta}h)\right)$ wordt een middelwaardestelling gesmeten en we krijgen $f'''(x+\widehat{\theta}h)$
En dan alles nog eens delen door $2h$ geeft

$$\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = f'(x) + \frac{h^2}{3!}f'''(x+\widehat{\theta}h)$$

$\frac{h^2}{3!}f'''(x+\widehat{\theta}h)$ is de afbreekfout, indien weggelaten. Deze is $\leq \frac{Mh^2}{6}$.
De afrondfout eens nader bekijken:

$$\begin{aligned}
\mathrm{fl}\left(\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}\right) &= \frac{f(x+h)(1+\xi_1) - f(x-h)(1+\xi_2)}{2h}(1+\xi_3)(1+\xi_4) \\
&= \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}(1+\xi_3)(1+\xi_4) \\
&\quad + \frac{f(x+h)\xi_1 - f(x-h)\xi_2}{2h}(1+\xi_3)(1+\xi_4)
\end{aligned}$$

11 oct '95

Interpolatie & Approximatie

f voldoende glad $\in C^n(a,b)$

Kies steunpunten $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$

Gevraagd is ene polynoom $\pi_f(x_i)$ zodat

$$\pi_f(x_i) = f(x_i) \qquad (i = 1 \ldots n)$$

waarbij graad $\pi_f \leq n-1$.

π_f kan dus geschreven worden als

$$\pi_f = \sum_{i=0}^{n-1} c_i x^i$$

Bewijs dat π_f bestaat

$$\pi_f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i x^j$$

Nu moet gelden dat

$$\pi_f(x_j) = f(x_j) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i x_j^i \qquad (j = 1 \ldots n)$$

Dit zijn n vergelijkingen met n onbekenden.

$$A := \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ \vdots \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix}$$

A wordt een vandermondematrix genoemd.

$det(A) =$ een polynoom in x_1 van graad $n-1$.

Hij heeft dus $n-1$ nulpunten.

De nulpunten zijn $x_2, x_3, \ldots x_n$

$det(A) = C_{x_2 \ldots x_n}(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)\ldots(x_1 - x_n)$

Hierbij is $C_{x_2 \ldots x_n}$ een constante enkel afhankelijk van $x_2 \ldots x_n$.

Dit geld ook met $x_2 \ldots x_{n-1}$

Dus in het algemeen heeft men

$$det(A) = \widetilde{C} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)$$

Een ander bewijs van het bestaan van π_f

$$L_i^{(n)}(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

$$L_i^{(n)}(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

$$\pi_f(x) = \sum f(x_i) L_i^{(n)}(x)$$

Hiermee is de uniciteit is nog niet bewezen. Deze manier is helaas niet echt efficiënt.

Stelling van Lagrange

$$f(x) = \pi_f(x) + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \prod_{i=1}^{n} (x - x_i) \qquad \xi \in \mathrm{int}(x, x_1 \ldots x_n)$$

Bewijs:

$$g(x) := \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$

$$f(x) = \pi_f(x) + g(x) \prod_{i=1}^{n} (x - x_i)$$

$$R_y(x) = f(x) - \pi_f(x) - g(y) \prod_{i=1}^{n} (x - x_i)$$

Nulpunten zijn $x_1 \ldots x_n$, maar ook y is een nulpunt.
Dan de stelling van Rolle los laten.

$$\exists \xi_y \in \mathrm{int}(x_1, x_2, \ldots x_n, y) \qquad \text{zodat} \qquad R_y^{(n)}(\xi_y) = 0$$

$$R_y^{(n)}(\xi_y) = f^{(n)}(\xi_y) - g(y) n!$$

Standaardalgorimte om een polynoom uit te rekenen

$$\pi(a) = \prod_{i=0}^{n-1} c_i a^i$$

De simpele ziel berekend dit als volgt: $S := 0$ for $i := 0$ to $n - 1$ do $\quad S := S + c_i * a^i$
De geoptimizeerde ziel denkt in termen van $S := c_{n-1}$ for $i := n - 2$ to 0 do $\quad S := S * x + c_i$

Definitie gedeelde differentie

De eerste gedeelde differentie:

$$f(x_1, x_2) := \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$

De tweede gedeelde differentie

$$f(x_1, x_2, x_3) := \frac{f(x_1, x_2) - f(x_2, x_3)}{x_1 - x_3}$$

En zo recursief de rest definiëren:

$$f(x_1 \dots x_{i+m}) := \frac{f(x_i, \dots x_{i+m}) - f(x_{i+1} \dots x_{i+m})}{x_i - x_{i+m}}$$

<u>Opgave 1.3, p.9</u>
Induktie over m.
Induktiebasis: m=1

$$\begin{aligned} f(x_i, x_{i+1}) &= \frac{f(x_i) - f(x_{i+1})}{x_i - x_{i+1}} \\ &= \frac{f(x_i)}{x_i - x_{i+1}} + \frac{f(x_{i+1})}{x_{i+1} - x_i} \\ &= \sum_{j=1}^{i+1} \frac{f(x_j)}{\prod_{l=i,l\neq j}^{i+1} x_j - x_l} \end{aligned}$$

Induktiestap:

$$\begin{aligned} & f(x_i \dots x_{i+(m+1)}) \\ =& \frac{f(x_i \dots x_{i+m}) - f(x_{i+1} \dots x_{i+m+1})}{x_i - x_{i+m+1}} \\ =& \frac{\sum_{j=i}^{i+m} \frac{f(x_j)}{\prod_{l=i,l\neq j}^{m+i} x_j - x_l} - \sum_{j=i+1}^{i+m+1} \frac{f(x_j)}{\prod_{l=i+1,l\neq j}^{m+i+1} x_j - x_l}}{x_i - x_{i+m+1}} \\ =& \frac{f(x_i)}{(x_i - x_{i+m+1}) \prod_{l=i,l\neq i}^{m+i} x_i - x_l} + \sum_{j=i+1}^{i+m} \frac{f(x_j)}{(x_i - x_{i+m+1}) \prod_{l=i,l\neq j}^{m+i} x_j - x_l} \\ & - \sum_{j=i+1}^{i+m} \frac{f(x_j)}{(x_i - x_{i+m+1}) \prod_{\substack{l=i+1 \\ l\neq j}}^{m+i+1} x_j - x_l} - \frac{f(x_{m+i+1})}{(x_i - x_{i+m+1}) \prod_{\substack{l=i+1 \\ l\neq m+i+1}}^{m+i} x_{m+i+1} - x_l} \\ =& \frac{f(x_i)}{\prod_{l=i,l\neq i}^{m+i+1} x_i - x_l} + \sum_{j=i+1}^{i+m} \frac{f(x_j)(x_j - x_{m+i+1})}{(x_i - x_{i+m+1}) \prod_{\substack{l=i \\ l\neq j}}^{m+i+1} x_j - x_l} \\ & - \sum_{j=i+1}^{i+m} \frac{f(x_j)(x_j - x_i)}{(x_i - x_{i+m+1}) \prod_{l=i,l\neq j}^{m+i+1} x_j - x_l} + \frac{f(x_{m+i+1})}{\prod_{l=i,l\neq m+i+1}^{m+i} x_{m+i+1} - x_l} \\ =& \frac{f(x_i)}{\prod_{l=i,l\neq i}^{m+i+1} x_i - x_l} + \sum_{j=i+1}^{i+m} \frac{f(x_j)(x_j - x_{m+i+1} - x_j + x_i)}{(x_i - x_{i+m+1}) \prod_{l=i,l\neq j}^{m+i+1} x_j - x_l} \\ & + \frac{f(x_{m+i+1})}{\prod_{\substack{l=i \\ l\neq m+i+1}}^{m+i} x_{m+i+1} - x_l} \\ =& \sum_{j=i}^{i+m+1} \frac{f(x_j)}{\prod_{l=i,l\neq j}^{m+i+1} x_j - x_l} \end{aligned}$$

<u>Opgave 1.4, p.9</u>

Bewijs van (1.8)
Inductiebasis:

$$\begin{aligned}
\pi_f(x) &= f(x_1)\frac{x-x_2}{x_1-x_2} + f(x_2)\frac{x-x_1}{x_2-x_1} \\
&= \frac{f(x_1)(x-x_2)(x_2-x_1) + f(x_2)(x-x_1)(x_1-x_2)}{(x_1-x_2)(x_2-x_1)} \\
&= \frac{f(x_1)(x-x_2) - f(x_2)(x-x_1)}{x_1-x_2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\pi_f(x) &= f(x_1) + (x-x_1)f(x_1,x_2) \\
&= f(x_1) + (x-x_1)\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} \\
&= f(x_1) + \frac{f(x_1)(x-x_1) - f(x_2)(x-x_1)}{x_1-x_2} \\
&= \frac{f(x_1)(x_1-x_2) + f(x_1)(x-x_1) - f(x_2)(x-x_1)}{x_1-x_2} \\
&= \frac{f(x_1)(x-x_2) - f(x_2)(x-x_1)}{x_1-x_2}
\end{aligned}$$

Induktiestap:

$$\begin{aligned}
\pi_f^{(n+1)}(x) &= \sum_{i=1}^{n+1}\prod_{j=1}^{i-1}(x-x_j)f(x_1\ldots x_i) \\
&= \pi_f^{(n)}(x) + \prod_{i=1}^{n}(x-x_i)f(x_1\ldots x_{n+1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \prod_{j=1;j\neq i}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j} + \prod_{i=1}^{n}(x-x_i)\sum_{j=1}^{n+1}\frac{f(x_j)}{\prod_{l=1;l\neq j}^{n+1} x_j - x_l}
\end{aligned}$$

De coëfficiënt bij $f(x_i)$ is

$$\begin{aligned}
&= \prod_{j=1;j\neq i}^{n}\frac{x-x_j}{x_i-x_j} + \frac{\prod_{j=1}^{n}(x-x_j)}{\prod_{j=1;j\neq i}^{n+1} x_j - x_l} \\
&= \frac{(x_i-x_{n+1})\prod_{j=1;j\neq i}^{n} x-x_j + \prod_{j=1;j\neq i}^{n} x-x_j}{\prod_{j=1;j\neq i}^{n+1} x_i-x_j} \\
&= \frac{(x_i-x_{n+1}+x-x_i)\prod_{j=1;j\neq i}^{n} x-x_j}{\prod_{j=1;j\neq i}^{n+1} x_i-x_j} \\
&= \frac{\prod_{j=1;j\neq i}^{n+1} x-x_j}{\prod_{j=1;j\neq i}^{n+1} x_i-x_j}
\end{aligned}$$

<u>Andere mogelijkheden om te interpoleren</u>

f glad
steunpunten $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$
π_f stukgewijs polynoom van graad 1
π_f is een continue functie
$\pi_{f_{(x_{i-1},x_i)}}$ is de polynoom van graad 1

$$\pi_f(x) = f(x_{i-1})\frac{x - x_i}{x_{i-1} - x_i} + f(x_i)\frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}$$

als $x_{i-1} < x < x_i$

<u>lokale & globale fout van deze benadering</u>
Als $x_{i-1} < x < x_i$ dan geldt $\forall x \exists \xi_x \in (x_{i-1}, x_i)$ zodat

$$f(x) - \pi_f(x) = \frac{1}{2} f''(\xi_x)(x - x_{i-1})(x - x_i)$$

Dit is de Lagrange–restterm. Hieruit volgt verder

$$\max_{x_{i-1}<x<x_i} |f(x) - \pi_f(x)| \leq \frac{1}{8} |x_i - x_{i-1}|^2 \max_{x_{i-1}<t<x_i} |f''(t)|$$

Voor de globale fout wordt dit dan

$$||f - \pi_f||_\infty \leq \frac{h^2}{8} ||f''||_\infty$$

waarbij $h := \max_i |x_i - x_{i-1}|$
Indien op $(x_{i-1} - x_i)$ een polynoom van graad 3 gebruikt wordt dan is de benaderingsfout $\leq Ch^4$ (kubische polynomen).

<u>Definitie $M_\Delta^{k,p}$</u>
(1.25) pagina 15.

16 oct '95

Foutafschatting voor stukgewijze polynoom–benadering

f voldoende glad dan is er $\pi_f \in M_\Delta^{k,p}$ sodat

$$\left|\left|f_\infty^{(j)} - \pi_f^{(j)}\right|\right| \leq C_j h^{k+1-j} \left|\left|f^{(k)}\right|\right|_\infty$$

waar natuurlijk $h := \max_i |x_i - x_{i-1}|$.
Het bewijs in de cursus levert eerst een bewijs dat deze stelling waar is, indien $j = 0$ (m in de cursus). Als $p = -1$ zijn de intervallen gewoon onafhankelijk van elkaar. Ze hoeven dan niet continu aan te sluiten. Als $p = 0$ nemen we een gewone Lagrange–interpolatie polynoom genomen op het stukgewijze interval π_i. Als $p > 0$ wordt er gekeken naar een veralgemening van de Lagrange–polynomen. De indutciestap om naar hogere afgeleiden te geraken is eenvoudig gedaan door de stelliung van Rolle uit de kast te rollen.

Kubische splines

$S_\Delta \in M_\Delta^{3,2}$, dan is $S_{\Delta|(x_{i-1},x_i)}$ een polynoom van de 3^e graad. Verder is $S_\Delta^{(j)}(x_1{+}0) = S_\Delta^{(j)}(x_i{-}0)$ voor alle $j = 0, 1, 2$. Het rooster: $\Delta = \{a = x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b\}$. De dimensie van dergelijke ruimte is dan $4n - 3(n-1)$.
Bsplines vormen een basis in $M^{3,2}$.
Dit stelsel kan opgelost worden op 1 coëfficiënt na. Maar er is een beter oplossing die niet alleen op kubische splines van toepassing is, maar ook op splines $\in M_\Delta^{k+1,k}$ (berekent uit $M_\Delta^{k,k-1}$).

23 oct '95

Extra opgave

Stel dat sinh berekent wordt als volgt

$$\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e{-}x)$$

e^x kan voldoende nauwkeurig uitgerekend worden:

$$\mathrm{fl}(e^x) = e^x(1+\xi) \qquad\qquad \text{met } |\xi| \leq \eta$$

Toon dan aan dat dit algoritme niet numeriek stabiel is voor kleine waarden van x.
De aantoning is op komst –

$$\begin{aligned}\mathrm{fl}(\widetilde{\sinh(x)}) =& \frac{e^x(1+\xi_1) - e^{-x}(1+\xi_2)}{2}(1+\xi_3)\\ =& \sinh(x)(1+\xi_3) + \frac{1}{2}(e^x\xi_1 + e^{-x}\xi_2)\end{aligned}$$

Als $x \to 0$ is $\sinh(x)(1+\xi_3)$ klein maar de relatieve fout $\frac{e^x\xi_1 + e^{-x}\xi_2}{\sinh(x)} = \frac{\mathrm{O}(2n)}{\sinh(x)}$ groot.
De methode om sinh stabiel te berekenen is als volgt:

$$\begin{aligned}\sinh(x) &= \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})\\ &= \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{x^j}{j!} - \frac{(-x)^n}{n!}\right)\\ &= x + \frac{x^3}{3!} + \ldots\\ &= x\left(1 + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + \ldots\right)\end{aligned}$$

30 oct '95

continuïteitsmodulus

Als f een continue functie is op het gesloten interval $[a, b]$ dan definiëren we de "continuïteitsmodulus" $\omega(f; \delta)$ van f:

$$\omega(f;\delta) := \max_{|x-y|<\delta} |f(x) - f(y)|$$

Indien f Lipshitz–continue is.

$$\exists M > 0 \quad |f(x) - f(y)| \leq M\,|x-y|$$

In dit geval is $\omega(f, \delta) = M\delta$.
Als f Lipshitz is, is deze ook uniform continue (zie Colebunders)

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Hier geldt dan dat $\omega(f, \delta) \to 0$ als $\delta \to 0$.
Stel dat $f \in C^1[a, b]$ dan is $\omega(f; \delta) \leq \delta\, ||f'||_i nfty$.

---

goedheid van de benadering van continu differentieerbare functies

Ten eerste vragen we ons af, hoe goed we zo'n continue functie kunnen benaderen met een element van $M_\Delta^{k-1,k}$. Kies daartoe

$$g(x) := \sum_{i=-\infty}^{\infty} f(t_{i+p}) B_i^k(x)$$

waar we p zo kiezen dat t_{i+p} in de drager $[t_i, t_{i+k+1}]$ van B_i ligt, bv $p = \frac{(k+1)}{2}$.
Stelling: Als f continu is op $[t_0, t_n]$ met continuïteitsmodulus $\omega(f; \delta)$ dan geld

$$\max_x |f(x) - g(x)| \leq k\omega(f; h)$$

waar h natuurlijk de maximale maaswijdte is.

bewijs hiervan:
Omdat $B_i^k \geq 0$ en $\sum_i B_i^k(x) = 1$, geldt

$$\begin{aligned}
|g(x) - f(x)| &= \left| \sum_i f(t_{i+p}) B_i^k(x) - f(x) \sum B_i^k(x) \right| \\
&= \left| \sum_i \left(f(t_{i+p}) - f(x)\right) B_i^k(x) \right| \\
&\leq \sum_i |f(t_{i+p}) - f(x)|\, B_i^k(x)
\end{aligned}$$

Op het interval $[t_j, t_{j+1}]$ zijn alleen $B_{j-k}^k \ldots B_j^k$ ongelijk van 0 zodat

$$\begin{aligned}
|g(x) - f(x)| &\leq \sum_{i=j-k}^{j} |f(t_{i+p}) - f(x)|\, B_i^k(x) \\
&\leq \max_{j-k \leq i \leq j} |f(t_{i+p}) - f(x)|
\end{aligned}$$

Aangezien $t_{i+p} - x \leq t_{j+p} - t_j \leq ph$ als $t_{i+p} > x$ en $x - t_{i+p} \leq t_{j+1} - t_{j+p-k} \leq (p+1)h$ als $t_{i+p} < x$ geldt:

$$|f(t_{i+p}) - f(x)| \leq (p+1)\omega(f; h) \leq k\omega(f; h)$$